BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2009

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPECIALITE	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8\,e^x$.
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur R, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions définies sur R de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

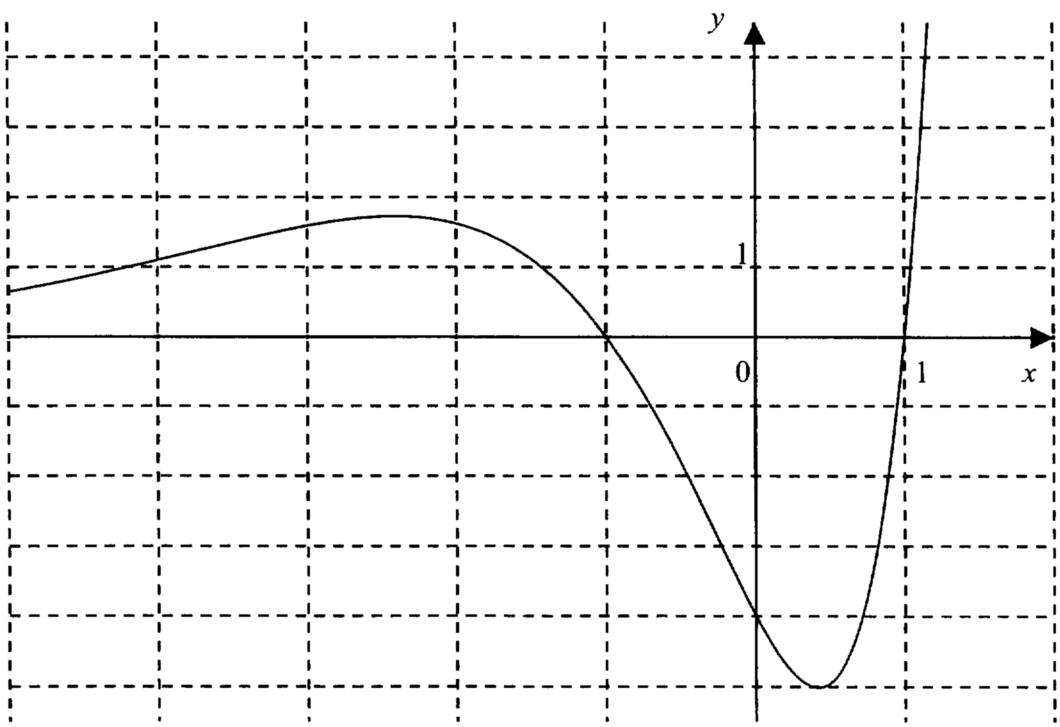
2° Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = 4x^2\,e^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (4x^2 - 4)\,e^x$. Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)\,e^x$.

b) Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2° a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) Déduire du a) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

1° La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

Donc, pour tout x de R, $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8\,e^x$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur R .

2° a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0, 1].

b) Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur R par $F(x) = (4x^2 - 8x + 4)\,e^x$ est une primitive de la fonction f.

Déduire de ce qui précède l'aire A, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 2 (8 points)

On considère un signal correspondant à la fonction f, définie sur R, périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t \text{ pour } 0 \leq t < \pi \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leq t < 2\pi .$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)\right)$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f.

1° Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f, pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi, 6\pi[$.

2° Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

3° Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1-(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} (\pi - t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}.$$

Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.

En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de l'entier non nul n.

4° *Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f*

Pour tout entier n, on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = \left|a_0\right|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n, arrondies à 10^{-4}, pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f.

La formule de Parseval permet d'écrire : $(E_f)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approchée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=5} c_n^2$.

Donner, en utilisant le tableau ci-dessus, une approximation décimale à 10^{-4} près de P.

5° *Comparaison avec la valeur exacte de la valeur efficace de* f

a) On rappelle que $(E_f)^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $(E_f)^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

b) Déduire des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\dfrac{P}{(E_f)^2}$.

On peut observer ici que $\dfrac{P}{(E_f)^2}$ *est inférieur à 0,95. On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à 5 ne fournit pas une excellente approximation de* $(E_f)^2$ *dans le cas où, comme ici, les valeurs de* c_n *ne décroissent pas rapidement.*

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T.
Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,\omega\,t},\ (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t \quad ;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t\ (k \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad c_0 = a_0 \quad ;$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \quad ; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS : groupement B

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION EN MICROTECHNIQUES

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i\sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
e^t	e^t	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
t^α $(\alpha \in \mathbf{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.