Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2010

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPECIALITE	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

crdp Aquitaine

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^x - 2x$
où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' - y = 0.$$

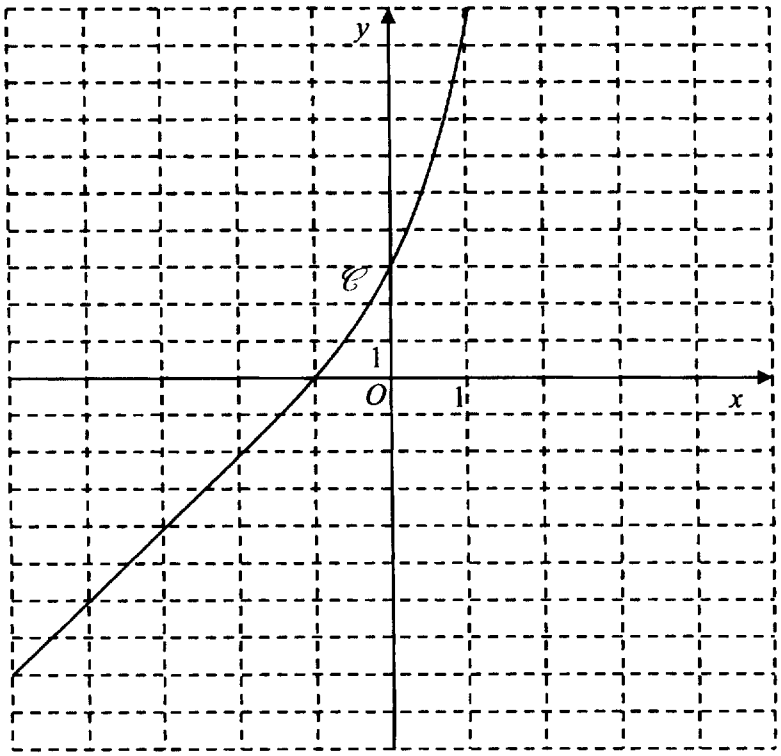
2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,e^x + 2x + 2$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)\,e^x + 2x + 2$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



crdp Aquitaine

1° Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2° *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse *A*	Réponse *B*	Réponse *C*
$y = x + 1$	$y = 2x + 2$	$y = 2$

3° a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Pour les question 3°b et 3°c, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse *A*	Réponse *B*	Réponse *C*
$y = 3$	$y = 3 + 4x$	$y = \frac{3}{2}x^2$

c) Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse *A*	Réponse *B*	Réponse *C*
au-dessus de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_{-1}^{1} (2x + 2)\,dx$.

Montrer que $I = 4$.

2° On note $J = \int_{-1}^{1} (x + 1)\,e^x\,dx$.

Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e + e^{-1}$.

3° a) On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, où f est la fonction définie dans la partie B.

Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

b) Donner la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

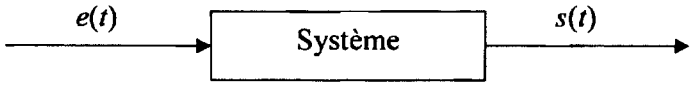
c) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1, 1]$, $f(x) \geq 0$.
Donner une interprétation graphique de K.

crdp Aquitaine

EXERCICE 2 (8 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un système, électrique ou mécanique. On note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie.



On note $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$ où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace.
La fonction de transfert H du système est définie par la relation : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
On suppose que pour ce système la fonction de transfert est égale à :

$$H(p) = \frac{2p}{(p+1)^2+1}.$$

A. Réponse du système à un échelon

On suppose dans cette partie que $e(t) = \mathcal{U}(t)$ où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$; $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

1° a) Déterminer $E(p)$.

b) En déduire que $S(p) = \dfrac{2}{(p+1)^2+1}$.

2° a) Déterminer, à l'aide du formulaire, $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)$.

b) En déduire $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)]$.

B. Recherche d'une pulsation particulière

On appelle « lieu de transfert » l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $H(\mathrm{j}\omega)$ lorsque ω décrit $]0, +\infty[$, où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

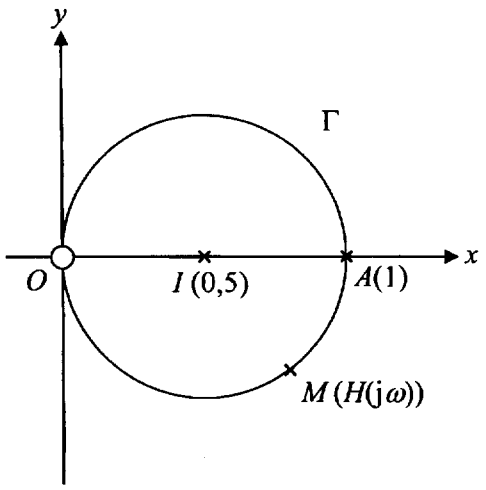
On admet que $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)}$.

On propose deux méthodes pour déterminer la pulsation ω pour laquelle le module $|H(\mathrm{j}\omega)|$ est maximal.

Les deux méthodes peuvent être traitées de façon indépendante.

1° *Méthode graphique*

On admet que le lieu de transfert Γ est le cercle de centre I d'affixe 0,5 et de rayon 0,5, privé du point O et représenté sur la figure ci-contre.



a) Donner la position du point M sur Γ pour laquelle la distance OM est maximale.

crdp Aquitaine

b) En déduire la valeur de $H(\mathrm{j}\omega)$ pour laquelle le module $|H(\mathrm{j}\omega)|$ est maximal.
c) Déterminer la valeur ω_0 de ω telle que $H(\mathrm{j}\omega) = 1$.

2° *Méthode analytique*

a) On considère la fonction r, définie sur $]0, +\infty[$, par $r(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)^2}}$.

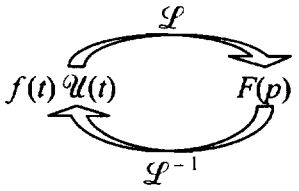
Montrer que, pour tout ω dans l'intervalle $]0, +\infty[$, le module $|H(\mathrm{j}\omega)|$ vaut $r(\omega)$.

b) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant pour la dérivée r' de la fonction r : $r'(\omega) = \dfrac{-2(\omega + \sqrt{2})(\omega - \sqrt{2})(\omega^2 + 2)}{(\omega^4 + 4)^{3/2}}$.

Ce résultat est admis et ne doit pas être démontré.
Par ailleurs, on admet que la fonction r possède un maximum unique ω_0 sur $]0, +\infty[$.
Déterminer la valeur de ω_0 en utilisant l'expression $r'(\omega)$.

ω_0 est la pulsation de résonance du système.

Formulaire



On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g] ;$$

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p} ;$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p + a} ;$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\,\mathcal{U}(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Plus généralement, si on note $\mathcal{L}[f(t)\,\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)\,\mathcal{U}(t - \tau)] = F(p)\,\mathrm{e}^{-\tau p} ;$$

$$\mathcal{L}[f(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathcal{U}(t)] = F(p + a) ;$$

$$\mathcal{L}[f'(t)\,\mathcal{U}(t)] = p\,F(p) - f(0^+).$$

crdp Aquitaine

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION EN MICROTECHNIQUES

crdp Aquitaine

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
e^t	e^t	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(k\,u)' = k\,u'$$
$$(uv)' = u'\,v + u\,v'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$
$$\left(e^u\right)' = e^u\,u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},\ u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha\,u^{\alpha-1}\,u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur [a , b] :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\,\varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\,\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\,\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\,\varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu\,e^{r_2 t}$ ..... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ..... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

crdp Aquitaine

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

crdp Aquitaine