ÉLÉMENTS DE RÉPONSE
PROPOSITION DE BARÈME

EXERCICE 1 (12 points)

A.1° a) $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. — 0,5 point

b) Toutes les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = \lambda\, e^{x} + \mu\, e^{2x}$ avec λ et μ réels. — 0,5 point

2° a) $g'(x) = (2x+2)\, e^{x}$. — 0,5 point

b) Vérification de :
pour tout x réel, $g''(x) - 3\,g'(x) + 2g(x) = -2e^{x} + 6$. — 1 point

3° Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = h(x) + g(x)$,
$f(x) = \lambda\, e^{x} + \mu\, e^{2x} + 2x\, e^{x} + 3$. — 0,5 point

4° La solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (2x-1)\, e^{x} + 3$. — 1 point

B.1° a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$. — 0,5 point

b) La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. — 0,5 point

2° a) Pour tout réel x, $(2x-1)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + 3 = 2 + x + \frac{3}{2}x^2$.
D'où le développement limité :
$f(x) = 2 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$. — 1 point

b) $T :\ y = 2 + x$. — 0,5 point

c) $\frac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0. — 1 point

3° a) $f'(x) \leq 0$ si $x \leq -\frac{1}{2}$; $f'(x) \geq 0$ si $x \geq -\frac{1}{2}$. Donc f est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ et f est croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. — 1 point

b) $f(-\frac{1}{2}) \approx 1{,}79$. — 0,5 point

4° a) $I = \frac{19}{8} = 1{,}1875$. — 1 point

b) $K = 3 - 2e^{0,5}$. — 1 point

c) $J = K + \int_0^{0,5} 3\, dx = \frac{9}{2} - 2e^{0,5}$. — 0,5 point

d) $J \approx 1{,}203$. $J - I$ inférieur à 0,02. — 0,5 point

EXERCICE 2 (8 points)

A.1° $P(8{,}18 \leq X \leq 8{,}48) \approx 0{,}905$. 1 point

2° $h \approx 0{,}176$. La probabilité qu'une gaine ait un diamètre compris entre 8,15 mm et 8,51 mm est 0,95. 1,5 point

B.1°
- Chaque prélèvement de 50 gaines est constitué par 50 épreuves élémentaires indépendantes (puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise).
- Chaque épreuve élémentaire (le tirage d'une gaine) peut déboucher sur deux résultats et deux seulement : la gaine est non conforme pour le diamètre intérieur, événement de probabilité $p = 0{,}096$ et la gaine est conforme pour le diamètre intérieur, événement de probabilité $q = 1 - p = 0{,}904$.
- Donc la variable aléatoire X qui associe à ces tirages le nombre de gaines non conformes pour le diamètre intérieur suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}096$. 1,5 point

2° $P(Y = 5) \approx 0{,}184$. 1 point

3° $P(Y \leq 2) \approx 0{,}129$. 1 point

C.1° Règle de décision :
- Soit $\overline{d}$ la moyenne des diamètres des pastilles d'un échantillon de 300 pastilles prélevé au hasard et avec remise.
- Si $\overline{d}$ appartient à l'intervalle [8,106 ; 8,154], on accepte H_0 au seuil de 0,05.
- Sinon, on rejette H_0 et on accepte H_1 au risque de 5 %. 1 point

2° Au risque de 5 %, on conclut que la livraison n'est pas conforme pour le diamètre. 1 point