



Ce document a été mis en ligne par l'organisme [FormaV®](#)

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :

www.formav.co/explorer

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2014

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B

CODE : MATGRB2

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

Une feuille de papier millimétré est fournie au candidat

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2014
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 1/5

EXERCICE 1 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$,

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

b) En déduire les solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

2° Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Une solution de l'équation différentielle (E) est donnée par la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par l'expression ci-dessous.

$g(x) = 2e^{-x}$	$h(x) = x^2 e^{-x}$	$k(x) = 2x e^{-x}$
------------------	---------------------	--------------------

Les dérivées première et seconde de ces fonctions sont données ci-dessous (ces calculs sont exacts).

$$g'(x) = -2e^{-x}$$

$$g''(x) = 2e^{-x}$$

$$h'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$$

$$h''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$$k'(x) = (2 - 2x)e^{-x}$$

$$k''(x) = (-4 + 2x)e^{-x}$$

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de la dérivée de f . Ce logiciel note $\%e^{-x}$ la quantité e^{-x} .

```
(%i1) f(x) := (x^2 - 1) * %e^(-x);  
(%o1) f(x) := (x^2 - 1) %e^-x  
  
(%i2) factor(diff(f(x), x));  
(%o2) -(x^2 - 2x - 1) %e^-x
```

Justifier par un calcul l'expression de $f'(x)$ affichée à la ligne notée (%o2).

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2014
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 2/5

b) On rappelle qu'une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

2° a) À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto e^t$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction :

$$x \mapsto e^{-x}.$$

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f

$$\text{est : } f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c) Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est au-dessus de la droite T . Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$-1 + x$ est positif au voisinage de 0.	$\frac{x^2}{2}$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.
---	--	--

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_1^3 f(x) dx$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a) Un logiciel de calcul formel fournit, à la ligne notée (%o3), une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction f . Ce logiciel note %e^{-x} l'expression e^{-x} .

```
(%i3) factor(integrate(f(x), x));
(%o3) -(x+1)^2 %e^-x
```

Justifier ce résultat.

b) Montrer que la valeur exacte de I est : $I = 4e^{-1} - 16e^{-3}$.

2° Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On admet que $f(x)$ est positif pour x dans l'intervalle $[1, 3]$.

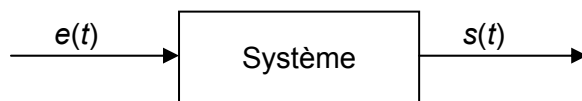
I est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.	I est une mesure, en cm^2 , de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.	I est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $y = 1$ et $y = 3$.
---	--	---

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2014
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 3/5

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un système, électrique ou mécanique. On désigne par $e(t)$ le signal d'entrée et par $s(t)$ le signal de sortie.



On note $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$, où $\mathcal{L}$ est la transformée de Laplace.

On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

L'équation différentielle régissant ce système s'écrit :

$$2s'(t) + s(t) = e(t),$$

où la fonction inconnue s vérifie $s(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul (en particulier $s(0^+) = 0$).

A. Étude du signal d'entrée

On suppose que le signal d'entrée e est donné par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t \geq 1 \end{cases}$$

1° a) Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle $[-1, 4]$. On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 5 cm pour l'axe des ordonnées.

b) Justifier, par exemple à l'aide d'un tableau, que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1).$$

2° a) Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t - 1))$.

b) En déduire $E(p)$.

B. Recherche de la transformée de Laplace du signal de sortie

1° Exprimer à l'aide de $S(p)$:

a) $\mathcal{L}(s'(t))$.

b) $\mathcal{L}(2s'(t) + s(t))$.

2° En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, montrer que $S(p) = \frac{1}{p(2p+1)}(1 - e^{-p})$.

3° Vérifier que, pour tout nombre réel p , on a : $\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{2}}$.

4° En déduire que $S(p)$ peut s'écrire : $S(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{2}} + \frac{e^{-p}}{p + \frac{1}{2}}$.

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2014
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 4/5

C. Obtention du signal de sortie

On recherche l'original de $S(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{2}} + \frac{e^{-p}}{p + \frac{1}{2}}$.

1° Un logiciel de calcul formel fournit l'affichage suivant.

```
>>> inverse_laplace_transform(1/p-exp(-p)/p-1/(p+1/2)+exp(-p)/(p+1/2),p,t)
  | $\theta(t) - \theta(t-1) - e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\theta(t-1)$ |
```

Le logiciel note θ la fonction échelon unité désignée par $\mathcal{U}$ dans cet exercice.
En utilisant cet affichage et le formulaire, donner les originaux de :

$$\frac{1}{p} ; \frac{e^{-p}}{p} ; \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \text{ et } \frac{e^{-p}}{p + \frac{1}{2}}.$$

Donner une expression de s à l'aide de $\mathcal{U}$.

2° a) Préciser $s(t)$ sur l'intervalle $] -\infty, 0]$.

b) Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que $s(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$.

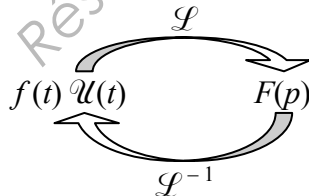
c) Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[1, +\infty[$. Montrer que $s(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (e^{\frac{1}{2}} - 1)$.

3° Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, où $s(t)$ est arrondi au centième.

t	-1	-0,5	0	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$s(t)$	0											

4° Sur le graphique de la partie A, représenter la fonction s sur l'intervalle $[-1, 4]$.

Formulaire



On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g].$$

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p + a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathcal{L}[f(t) \mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathcal{L}[f(t - \tau) \mathcal{U}(t - \tau)] = F(p) e^{-\tau p};$$

$$\mathcal{L}[f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)] = F(p + a);$$

$$\mathcal{L}[f'(t) \mathcal{U}(t)] = p F(p) - f(0^+).$$

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS

**CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION
EN MICROTECHNIQUES**

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} \dots$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	