BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2017

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : MATGRB2***

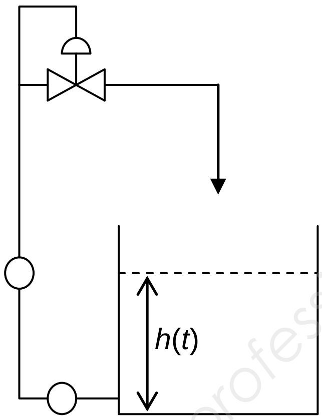
Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999. La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)



Dans un régulateur de niveau, la hauteur de liquide varie en fonction du temps. On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) atteinte par le liquide à l'instant t (en heure).
On suppose que h est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) :

$$10\,y'' + 3\,y' + 0{,}2\,y = 1\ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° a) Résoudre dans **R** l'équation $10\,r^2 + 3\,r + 0{,}2 = 0$.

b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$10\,y'' + 3\,y' + 0{,}2\,y = 0.$$

On fournit les formules suivantes.

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$. Équation caractéristique : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{r t}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $y(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

2° Vérifier que la fonction g, définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 5$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Les conditions initiales du système mécanique conduisent à poser $h(0) = 8$ et $h'(0) = 0$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de la fonction h.

▶ Calcul formel	
1	RésolEquaDiff[10y"+3y'+0.2y=1,y, t, (0, 8),(0,0)] → $y = 6\,e^{-\frac{t}{10}} - 3\,e^{-\frac{t}{5}} + 5$

Quelle est la hauteur du liquide au bout de deux heures ? Arrondir au dixième.

B. Étude de fonction

On considère la fonction h définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(t) = 6\,e^{-0,1\,t} - 3\,e^{-0,2\,t} + 5.$$

On note C la courbe représentative de h dans un repère orthogonal et on appelle D la droite d'équation $y = 5$.

1° a) Justifier que $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 5$.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

2° Déterminer une expression de $h'(t)$.

3° Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant, qui est admis : l'ensemble des solutions de l'inéquation $h'(t) \leq 0$ est l'intervalle $[0, +\infty[$.

▶ Calcul formel	
1	h(t):=6*exp(-0.1*t)-3*exp(-0.2*t)+5 → $h(t) := -3\,e^{-\frac{1}{5}t} + 6\,e^{-\frac{1}{10}t} + 5$
2	Résoudre[Dérivée[h(t), t]<=0, t] → $\{t \geq 0\}$

Dresser le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

C. Étude locale

On rappelle que la fonction h est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(t) = 6\,\mathrm{e}^{-0{,}1\,t} - 3\,\mathrm{e}^{-0{,}2\,t} + 5.$$

On note C, la courbe représentative de h dans un repère orthogonal et on appelle T, la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction h au voisinage de zéro.

▸ **Calcul formel**	
1	h(t):=6*exp(-0.1*t)-3*exp(-0.2*t)+5 $\rightarrow\ \mathbf{h(t)\ :=\ -3\,e^{-\frac{1}{5}t}+6\,e^{-\frac{1}{10}t}+5}$
2	PolynômeTaylor[h(t), t, 0, 2] $\rightarrow\ \mathbf{8-\dfrac{3}{100}\,t^2}$

1° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Le développement limité de la fonction h, à l'ordre 2, au voisinage de 0 est :

$8 - 0{,}3\,t^2$	$8 - \dfrac{3}{100}\,t^2 + t^2\,\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0$	$8 - \dfrac{3}{100}\,t^2 + t^2\,\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$	$-\dfrac{3}{100}\,t^2 + t^2\,\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

2° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Une équation de la tangente T est :

$y = -\dfrac{3}{100}\,t^2$	$y = 8 - \dfrac{3}{100}\,t^2$	$y = 8$	$y = 8\,t$

3° Étudier la position relative, au voisinage du point d'abscisse 0, de la courbe C et de la tangente T.

EXERCICE 2 (10 points)

Soit f la fonction périodique de période $T = 2\pi$, paire, définie par :

$$f(t) = 1 \ \text{ si } t \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \ \text{ si } t \in \left]\frac{\pi}{2}\,,\ \pi\right].$$

On note ω la pulsation associée à la fonction f.

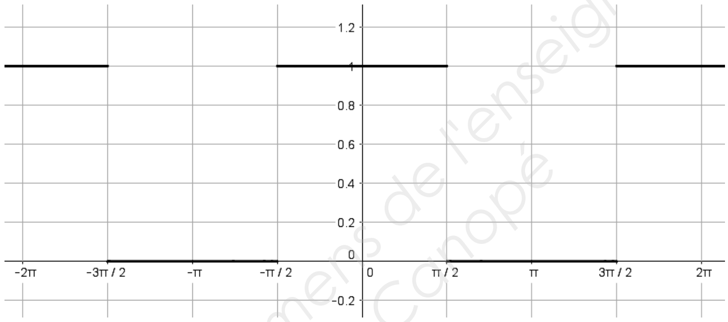
Un formulaire sur les séries de Fourier figure à la dernière page.

A. Étude d'une fonction

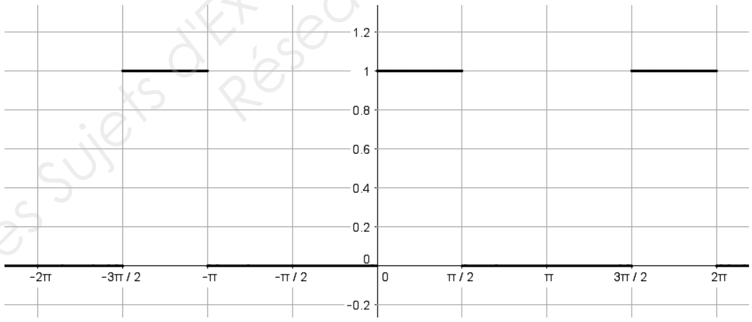
1° Justifier que $\omega = 1$.

2° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

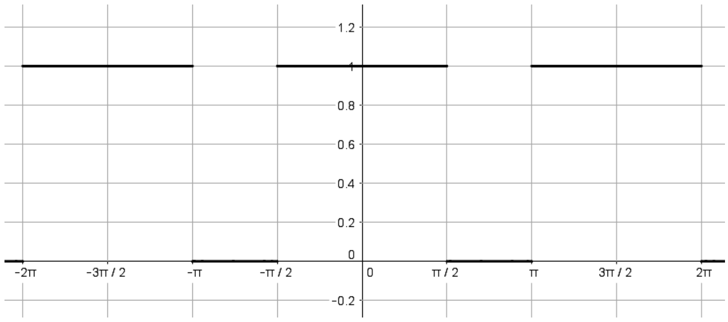
À quelle courbe correspond la fonction f ?



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

B. Calcul des coefficients de Fourier

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction *f*.

1° Déterminer a_0.

2° Justifier que pour tout entier naturel *n* non nul, $b_n = 0$.

3° Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant, qui est admis.

Calcul formel	
1	Intégrale[1*cos(n*t), t, -pi/2, pi/2] $\rightarrow \ 2 \cdot \dfrac{\sin\left(n \ \frac{\pi}{2}\right)}{n}$

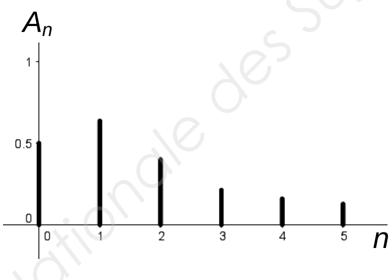
Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

4° Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs exactes.

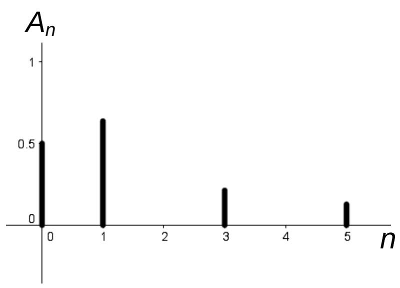
n	0	1	2	3	4	5
a_n						

C. Étude du spectre

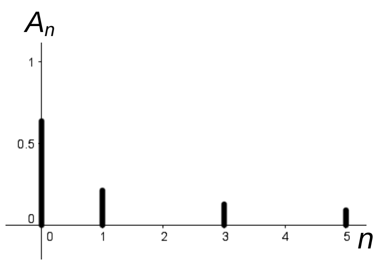
1° Le spectre d'amplitude de la fonction *f* est donné par les nombres A_n définis pour tout entier *n* non nul par $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $A_0 = |a_0|$. Dans ce cas, $A_0 = \dfrac{1}{2}$.
Indiquer, sans justification, quel est, parmi les spectres d'amplitude ci-dessous, celui associé à *f*.



Spectre 1



Spectre 2



Spectre 3

2° On note f_e la valeur efficace de la fonction *f*. Cette valeur est définie par l'égalité :

$$f_e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt.$$

Montrer que $f_e^2 = \dfrac{1}{2}$.

3° Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

a) On considère l'algorithme suivant.

Variables
S, P et a sont des nombres réels
k est un nombre entier
Initialisation
k prend la valeur 0
a prend la valeur 0,5
S prend la valeur a^2
P prend la valeur 0,5
Traitement
Tant que $\frac{S}{P} < 0{,}95$
    k prend la valeur $k + 1$
    a prend la valeur $\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$
    S prend la valeur $S + \frac{1}{2} a^2$
Fin de Tant que
Affichage
Afficher k

Faire tourner cet algorithme « à la main » jusqu'à son arrêt, en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

k	0	1	2	…
a	0,5	0,637		…
S	0,25	0,453		…
$\frac{S}{P} < 0{,}95$	VRAI	VRAI		…

b) Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme ?

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \ ;$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \ ;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbf{N}^*) \ ;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t.$$