



Ce document a été mis en ligne par l'organisme [FormaV®](#)

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :

www.formav.co/explorer

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2019

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B

CODE : MATGRB2

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Tout autre matériel est interdit.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

GROUPEMENT B DES BTS	Session 2019
Mathématiques	Code : MATGRB2
	Page : 1/8

EXERCICE 1 (10 points)

Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant t , exprimé en seconde, avec t variant dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier l'évolution de la température du conducteur en fonction du temps.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est celle du milieu ambiant, c'est-à-dire 18 degrés Celsius. Ainsi, on a $f(0) = 18$.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,05 y = 2,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1° a) Résoudre l'équation (E_0) : $y' + 0,05 y = 0$.

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$a y' + b y = 0$	$f(t) = k e^{-\frac{b}{a}t}$

b) Vérifier que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 40$ est une solution de l'équation différentielle (E).

c) En déduire les solutions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E).

2° On rappelle que la température initiale du conducteur est 18° Celsius. Ainsi, la fonction f exprimant la température du conducteur est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 18$.

Déterminer alors une expression de la fonction f .

B. Étude de la fonction f

On admet que la fonction donnant la température du conducteur est la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = -22 e^{-0,05 t} + 40.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal. La courbe C est tracée en annexe.

1° a) On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05 t} = 0$. Déterminer alors la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation. Tracer cette asymptote sur la représentation graphique donnée en annexe.

GROUPEMENT B DES BTS	Session 2019
Mathématiques	Code : MATGRB2 Page : 2/8

2° Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f .

1	$f(t) := -22 e^{-0.05t} + 40$
	$\rightarrow f(t) := -22 e^{-\frac{1}{20}t} + 40$
Dérivée($f(t)$, t)	
2	$\rightarrow \frac{11}{10} e^{-\frac{1}{20}t}$

a) En admettant ce résultat, étudier les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.

3° Ce même logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

PolynômeTaylor($f(t)$, t , 0, 2)	
3	$\rightarrow 18 + \frac{11}{10} t - \frac{11}{400} t^2$

Les deux questions suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

a) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est :

$y = 18$	$y = 18 + \frac{11}{10} t$	$y = 18 + \frac{11}{10} t - \frac{11}{400} t^2$
----------	----------------------------	---

b) La vitesse de chauffe, exprimée en degré Celsius par seconde, à l'instant initial est égale à $f'(0)$. Cette vitesse vaut :

18	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{400}$
----	-----------------	------------------

C. Dépassement d'un seuil et algorithmique

On cherche à déterminer le premier instant t , en seconde, à partir duquel la température du fil du conducteur dépasse 21° Celsius.

À cette fin, on considère l'algorithme suivant.

```
t ← 0
Tant que f(t) ≤ 21
    t ← t + 1
Fin de Tant que
```

Remarque : dans cet algorithme $t \leftarrow 0$ signifie que t prend la valeur 0.

1° Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau donné en annexe.

2° Quelle sera la valeur contenue dans la variable t à la fin de l'algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

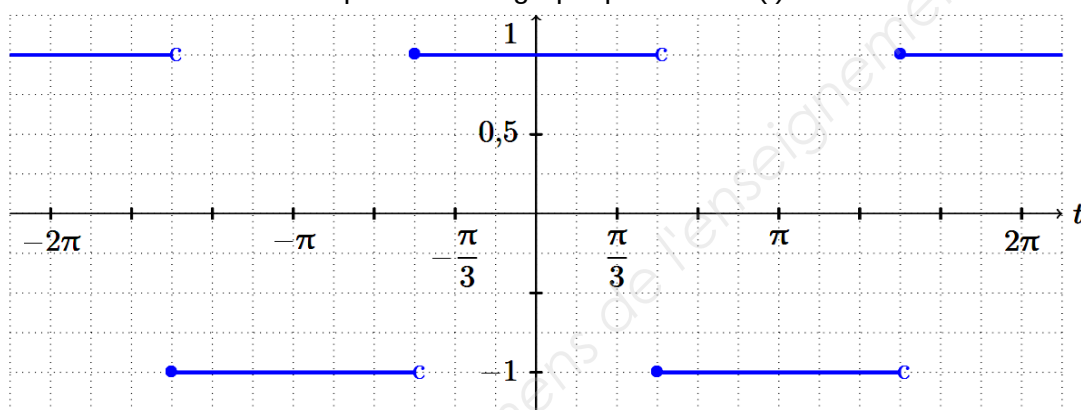
EXERCICE 2 (10 points)

Dans les entreprises, l'énergie électrique est fournie par des onduleurs qui alimentent une multitude de récepteurs (ordinateurs, lampes basse consommation...) générant des courants harmoniques. Sans une installation adaptée et une utilisation de récepteurs optimisés, l'accumulation d'harmoniques de rangs multiples de 3 conduit au déséquilibre du triphasé. Cela peut engendrer de graves problèmes : surchauffe du fil portant le neutre, phénomène d'interférence, augmentation des pertes d'énergie, ouverture des fusibles ou interruptions automatiques.

A. Représentation graphique d'un signal déphasé

Un onduleur à commande asynchrone délivre une tension périodique $f(t)$ de période 2π selon la représentation graphique suivante.

Représentation graphique de $t \mapsto f(t)$:



Une représentation graphique de la fonction $t \mapsto f(t)$ est redonnée en annexe 2.

1° À l'aide de la représentation graphique de la fonction f , compléter le tableau de valeurs donné en annexe 2.

2° Une représentation graphique de la fonction $t \mapsto f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ est donnée en annexe 2.

Construire en annexe 2 la représentation graphique de la fonction $t \mapsto f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ dans le repère prévu à cet effet.

3° En régime triphasé, l'onduleur soumet la phase 1 à la tension $f(t)$, la phase 2 à la tension $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ et la phase 3 à la tension $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$. Le neutre est soumis à la somme $S(t)$ des

tensions des trois phases définie par : $S(t) = f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$.

La système triphasé est équilibré si, pour tout nombre réel t , $S(t) = 0$.

a) Calculer $S(0)$.

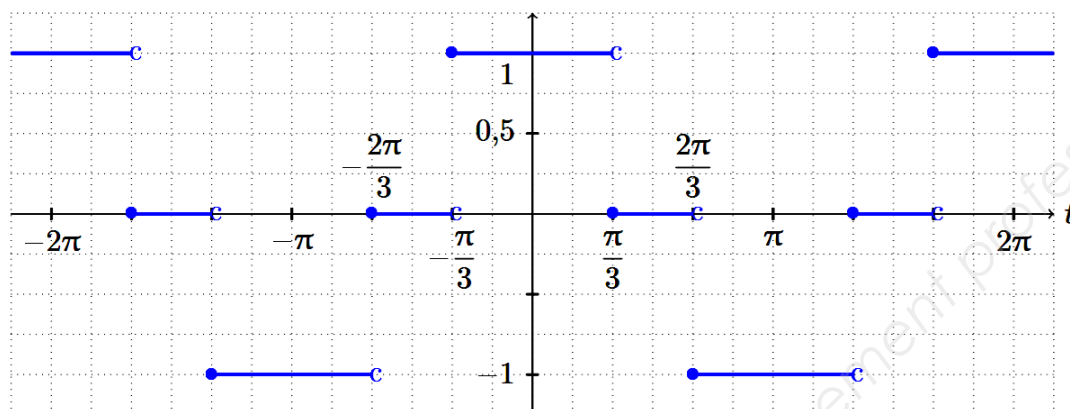
b) Le système triphasé étudié dans cette partie est-il équilibré ?

GROUPEMENT B DES BTS		Session 2019
Mathématiques	Code : MATGRB2	Page : 5/8

B. Développement en série de Fourier

Pour garantir l'équilibrage d'un système triphasé, on peut utiliser un onduleur à commande décalée. Ainsi, nous considérons dans cette partie que la tension délivrée est un signal g de période 2π dont une représentation graphique figure ci-dessous.

Représentation graphique de $t \mapsto g(t)$:



Dans la suite de l'exercice, a_0 , a_n et b_n désignent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction g avec les notations du formulaire donné en bas de page.

1° Donner la parité de la fonction g . En déduire la valeur des coefficients b_n pour tout entier naturel n non nul.

2° Donner la valeur de $g(t)$ sur chacun des trois intervalles $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ et $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

3° a) Déterminer a_0 .

b) Un logiciel de calcul formel fournit, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}.$$

En admettant le résultat précédent, justifier que, pour tout entier naturel k non nul, $a_{3k} = 0$.

c) On démontre que ce qui empêche un système d'être équilibré est la présence d'harmoniques non nulles de rangs multiples de 3 dans le développement en série de Fourier de la fonction g .

En admettant cette règle, peut-on considérer que le système est équilibré ?

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Développement en série de Fourier :

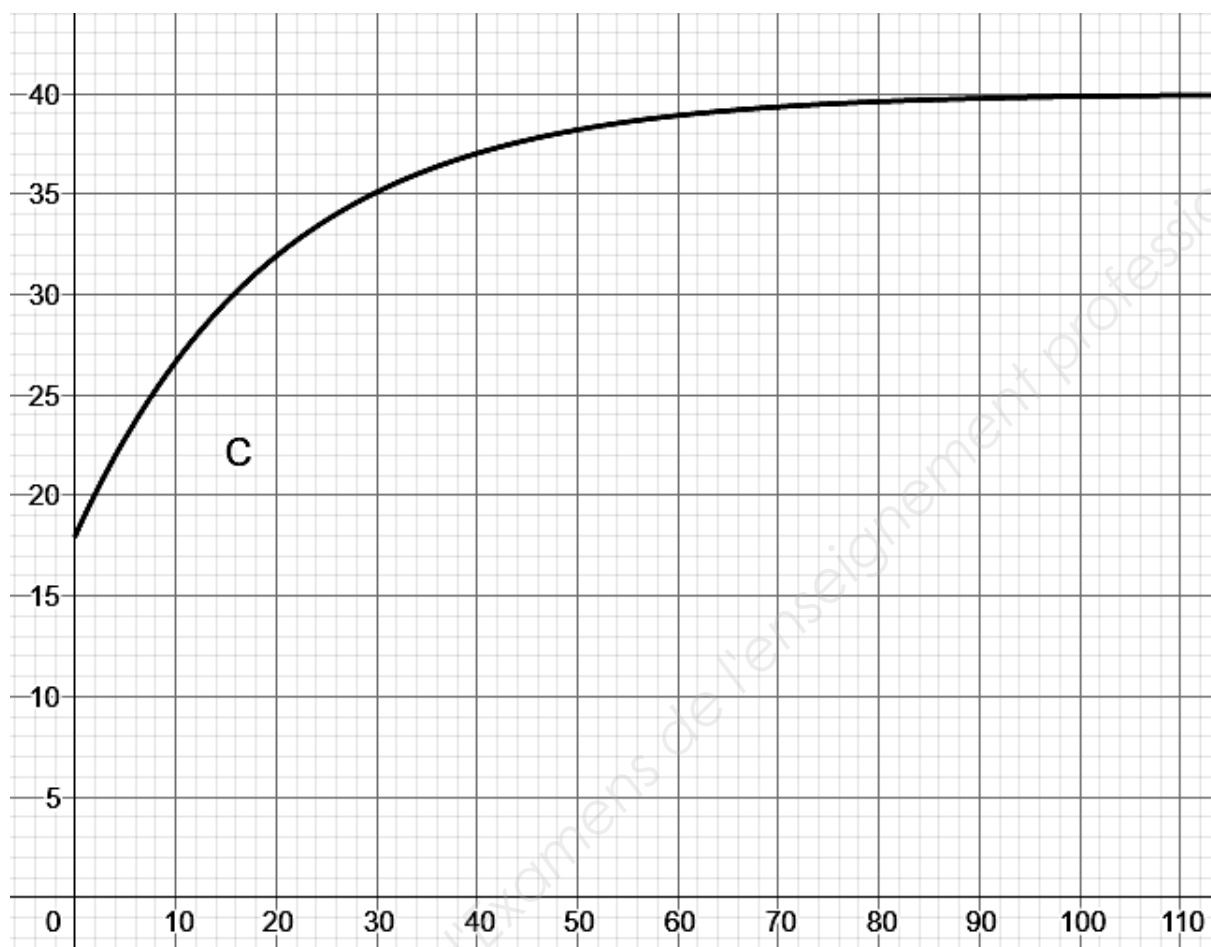
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \in \mathbf{N}^*);$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

ANNEXE 1 À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1 QUESTION B. 1° b)



EXERCICE 1 QUESTION C. 1°

Valeur de t	Valeur de $f(t)$ Arrondie à 10^{-2}	Condition $f(t) \leq 21$
0	18	VRAIE
1		

Nom de famille :

(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom(s) :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Numéro
Inscription :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Né(e) le :

		/			/				
--	--	---	--	--	---	--	--	--	--

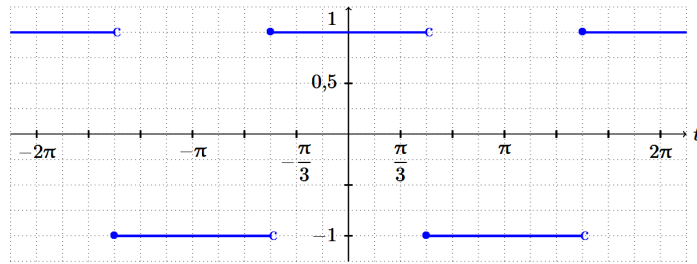
(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE

Représentation graphique de $t \mapsto f(t)$:

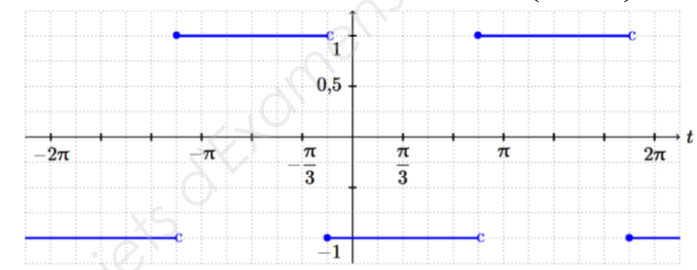


EXERCICE 2 QUESTION A. 1°

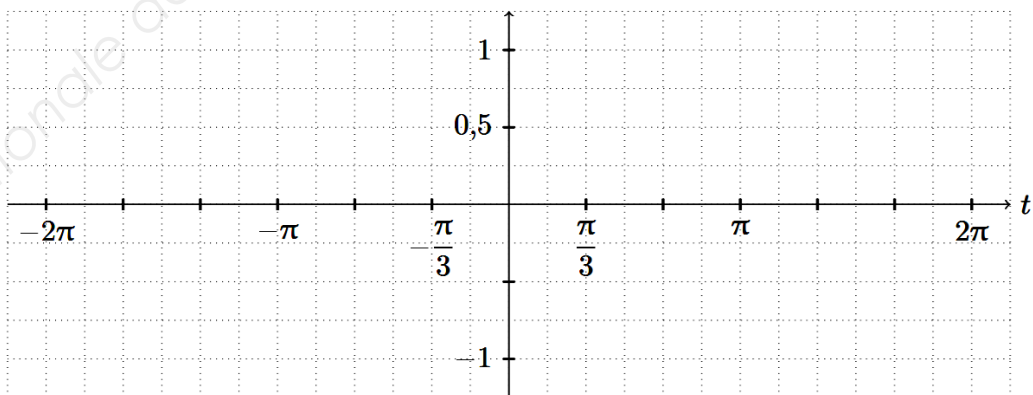
t	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\pi$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$t + \frac{4\pi}{3}$							
$f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$							

EXERCICE 2 QUESTION A. 2°

Représentation graphique de $t \mapsto f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$:



Repère pour la représentation de $t \mapsto f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$:



Nom de famille :

(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom(s) :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Numéro
Inscription :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Né(e) le :

		/			/				
--	--	---	--	--	---	--	--	--	--

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel