Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CIM

Mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscim.fr/assets/annales/bts-cim/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle, étudiée au moyen d'une équation différentielle, de limites, de variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

L'équation homogène est de la forme `y' + ay = 0`. La formule fournie dans le sujet donne directement les solutions `y(t)=C e^{-at}`, où `C` est une constante réelle. En prenant `a=0,8`, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}, \quad C \in \mathbb{R}.$

Question 1.b. Soit g définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction `g(t)=5` est constante, donc `g'(t)=0`.
2. En remplaçant `g` et sa dérivée dans le membre de gauche, on trouve `g'(t)+0,8g(t)=0+0,8×5=4`.

L'égalité étant vérifiée pour tout `t`, la fonction proposée est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g\prime + 0,8g = 4$: $g(t) = 5$ est solution.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La question précédente établit que la fonction constante `g(t)=5` est une solution particulière de l'équation complète. Les solutions de cette équation s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière toutes les solutions de l'équation homogène, déterminées à la question 1.a. La constante d'intégration reste arbitraire puisqu'aucune condition initiale n'est imposée ici.

On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}, \quad C \in \mathbb{R}.$

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

D'après la question précédente, une solution générale est $f(t)=5+Ce^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^{0}=1$, donc la condition $f(0)=20$ donne $5+C=20$. On trouve alors $C=15$. Il suffit de remplacer cette constante dans la solution générale pour déterminer la fonction correspondant au mouvement du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5.$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers zéro. Dans l'expression de f, le terme exponentiel est multiplié par 15 et tend toujours vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de la somme est donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5.$

Question 1.b. **Déduire de cette limite que la courbe représentative de f admet une asymptote et en donner une équation.**

La fonction $f(t)$ tend vers la valeur finie 5 lorsque t tend vers $+\infty$. D'après la propriété des limites, la courbe représentative de f admet alors une asymptote horizontale en $+\infty$. L'ordonnée de cette droite est précisément la valeur de la limite.

L'équation de l'asymptote est donc $y=5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. **En utilisant f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t\geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t)=-12e^{-0,8t}<0$ sur l'intervalle, donc f est strictement décroissante. Son départ vaut $f(0)=20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 5, d'après la question 1.a.

t	0	+∞
f'(t)	−	
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;+\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout instant fini, $e^{-0,8t}>0$, donc $15e^{-0,8t}+5>5$. La vitesse demeure ainsi positive et la limite de la fonction est 5 m·s⁻¹.

- La vitesse diminue pendant le freinage.
- Elle ne s'annule jamais selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers 5 m·s⁻¹ et n'atteint jamais zéro.

Question 4.a. Soit F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $F(t)=-18,75e^{-0,8t}+5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle, le premier terme a pour dérivée $-18,75\times(-0,8)e^{-0,8t}=15e^{-0,8t}$. La dérivée de $5t$ vaut 5. La somme obtenue est exactement l'expression de $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F\prime(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1, donc le théorème fondamental donne $d=F(1)-F(0)$.
2. En utilisant la primitive fournie, $d=(-18,75e^{-0,8}+5)-(-18,75)$.
3. On simplifie, puis on arrondit la valeur en mètres au centième, ce qui correspond au centimètre demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier la seule expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le sujet précise qu'une seule des trois propositions est exacte et qu'aucune justification n'est demandée. Le développement limité doit conserver le terme constant et le terme du premier degré, puis le coefficient exact du terme en `t²`. La troisième proposition utilise le reste sous la forme `t²ε(t)`, avec `ε(t)` qui tend vers zéro en zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to 0.$

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro s'écrit `y=f(0)+f'(0)t`. La condition initiale donne `f(0)=20`. Avec l'expression de la dérivée, `f'(0)=−12e⁰=−12`. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient son équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t.$

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

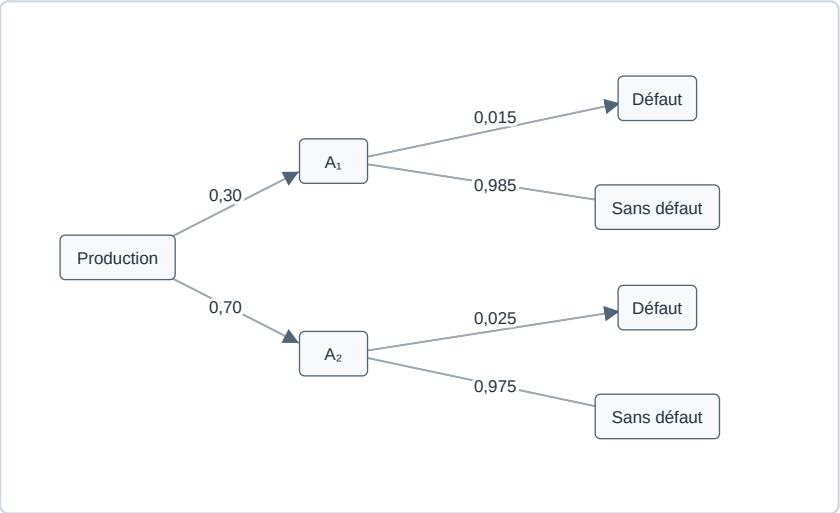
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement des tubes et la proportion de rivets conformes utilisés pour leur fixation.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des données sur les deux ateliers et leurs taux de défaut, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

On sépare d'abord la production selon l'atelier d'origine, puis chaque atelier selon la présence ou l'absence d'un défaut. Les probabilités des branches « défaut » sont les taux conditionnels indiqués pour chaque atelier ; les probabilités des branches « sans défaut » sont leurs compléments à 1.

Arbre pondéré de la production et des défauts



Les taux de défaut sont conditionnels à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : parts de production 0,30 et 0,70, puis taux de défaut 0,015 et 0,025, avec leurs complémentaires.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit P(A₁ ∩ D).

Pour obtenir la probabilité qu'un tube vienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la part de production de cet atelier par son taux de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Ce résultat concerne l'ensemble de la production, et non seulement les tubes de l'atelier 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit $0,45\%$ de la production totale.

Question 3. **Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard dans la production totale présente un défaut, soit P(D).**

Atelier	Calcul de la probabilité d'un défaut
1	$0,30 \times 0,015 = 0,0045$
2	$0,70 \times 0,025 = 0,0175$

Les deux ateliers couvrent toute la production. On additionne donc les probabilités obtenues : $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit $2,2\%$ de la production totale.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

1. La probabilité d'être de l'atelier 2 et sans défaut est $0,70 \times 0,975 = 0,6825$.
2. La probabilité d'être sans défaut vaut $1 - 0,022 = 0,978$.
3. Donc $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$.

On rapporte les tubes sans défaut de l'atelier 2 à l'ensemble des tubes sans défaut.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ $69,8\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page 7 donne $\lambda = 0,001$ par heure. Pour une loi exponentielle, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E(T) = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Dans ce modèle, la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube est de 1 000 heures ; cela ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement cette durée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement modélisée.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit inférieure à 8 000 heures.**

Avec le paramètre indiqué dans le sujet, $\lambda = 0,001$, la formule de la loi exponentielle donne :

- $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} \approx 0,9996645$;
- arrondie au centième, cette probabilité vaut $1,00$.

La durée étant une variable continue, utiliser $T < 8\,000$ ou $T \leq 8\,000$ donne la même probabilité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00$, soit 100% au centième.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser 10 000 heures est la probabilité de survie de la loi exponentielle : $P(T > 10\,000) = e^{-\lambda \times 10\,000}$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième comme demandé, cette valeur est $0,00$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.**

Rivets conformes	Effectif total	Fréquence observée
975	1 000	$\dfrac{975}{1\,000} = 0,975$

La fréquence observée fournit l'estimation ponctuelle de la proportion inconnue p.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0,975$, soit $97,5\%$.

Question 2. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

1. La fréquence observée est $f = 0,975$ et $n = 1\,000$.

2. La marge est $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$.
3. L'intervalle centré sur f est $[0,975 - 0,009677\ ;\ 0,975 + 0,009677]$.

En arrondissant chaque borne au millième, on obtient l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Son coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux, où il est 3. Deux exercices de dix points étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de fabrication, mobilisant équations différentielles, analyse, intégration, probabilités, loi exponentielle et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle, calculable avec une primitive.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $E(T) = 1/\lambda$.
- L'intervalle de confiance fourni pour une proportion est centré sur f et utilise la marge $1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale pour déterminer la solution particulière attendue.
- Interpréter la limite de la vitesse : une limite strictement positive ne correspond pas à un arrêt complet.
- Distinguer probabilités conjointes et conditionnelles et reporter correctement chaque donnée dans l'arbre pondéré.
- Respecter les arrondis demandés et conserver les unités, notamment pour les distances et les durées.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une distance à partir de la fonction vitesse ?

La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle. Si une primitive F est connue, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on arrondit selon la précision demandée.

Q : Comment calculer une probabilité de durée de vie avec une loi exponentielle ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la probabilité d'une durée inférieure ou égale à t vaut $1 - e^{-\lambda t}$. La probabilité d'une durée supérieure à t vaut $e^{-\lambda t}$.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de dix points, avec des parties indiquées comme indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, traitez d'abord les questions maîtrisées et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Que faut-il présenter pour l'intervalle de confiance demandé ?

Utilisez la fréquence observée, l'effectif de l'échantillon et la formule fournie. Présentez clairement les deux bornes de l'intervalle de confiance à 95 %, arrondies à 10^{-3} près comme le demande le sujet.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscim.fr/assets/annales/bts-cim/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Industrialisation en Microtechniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.