Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CIM

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscim.fr/assets/annales/bts-cim/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, puis étudiée pour déterminer son comportement et la distance parcourue.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie indique que les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. On remplace donc a par $0,8$ pour obtenir l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$, donc g est bien une solution particulière de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$, donc $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Une solution de l'équation complète est la solution particulière $g(t) = 5$. Toute solution de (E) s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée (E_0), soit $ke^{-0,8t}$. On obtient ainsi l'ensemble des solutions de (E), pour $t \in [0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale s'écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 15$, ce qui détermine la solution recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. À partir de l'expression f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est 5.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5. Par somme, la limite de $f(t)$ est 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers la valeur finie 5 lorsque $t \to +\infty$, la courbe C se rapproche d'une droite horizontale d'ordonnée 5. Cette droite est l'asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale est $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle vaut 20 en $t = 0$ et tend vers 5 lorsque $t \to +\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi positive et ne peut pas s'annuler. Elle se rapproche de 5 m·s⁻¹ à mesure que le temps augmente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste supérieure à 5 m·s⁻¹.

Question 4. a. **Soit F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **Sachant que la distance parcourue entre t_0 et t_1 est $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$, calculer la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant dans l'expression de F, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation donne environ $15,3251$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier la seule expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. La proposition correcte est celle qui ajoute au polynôme un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il s'agit de la troisième proposition, où $4,8 = \frac{24}{5}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$, et la dérivée donnée dans l'énoncé fournit $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

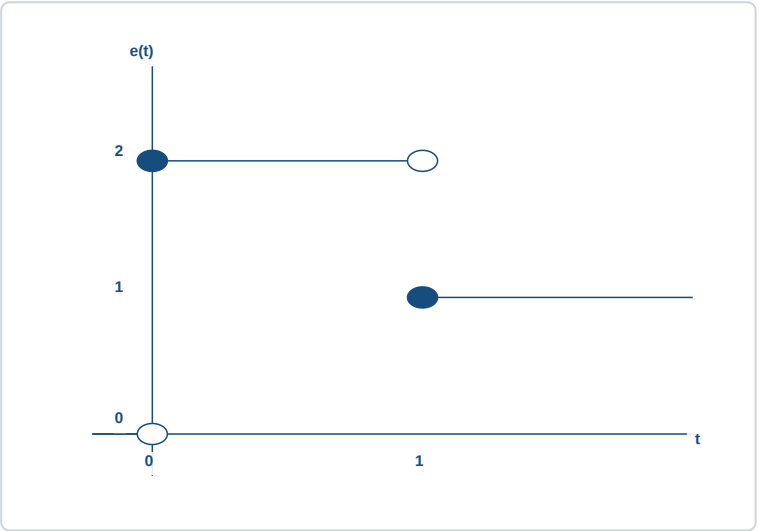
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de représenter les signaux d'entrée et de sortie, puis d'utiliser les transformées de Laplace pour déterminer et étudier la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est causal : il vaut 0 avant l'origine. Comme $U(0) = 1$, il vaut 2 dès $t = 0$. À $t = 1$, le terme retardé s'active et le signal vaut ensuite $2 - 1 = 1$. Le tracé distingue les valeurs prises aux instants de saut.

Signal d'entrée e(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. En appliquant ces résultats à $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, on obtient directement sa transformée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. On remplace par $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la question précédente, puis on met les termes sur le dénominateur commun $p(p+1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

En réduisant au même dénominateur, le numérateur vaut $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les dénominateurs sont définis.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de (1/(p + 1))e⁻ᵖ.

Les deux premiers inverses sont usuels. Pour un facteur e^{-p}, le théorème du retard remplace t par $t-1$ et multiplie par $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

On décompose $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$, puis on applique les inverses de la question précédente. Pour $0 \le t < 1$, les termes retardés sont nuls. Il reste $2\big(U(t) - e^{-t}U(t)\big)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. On admet que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[. Calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.

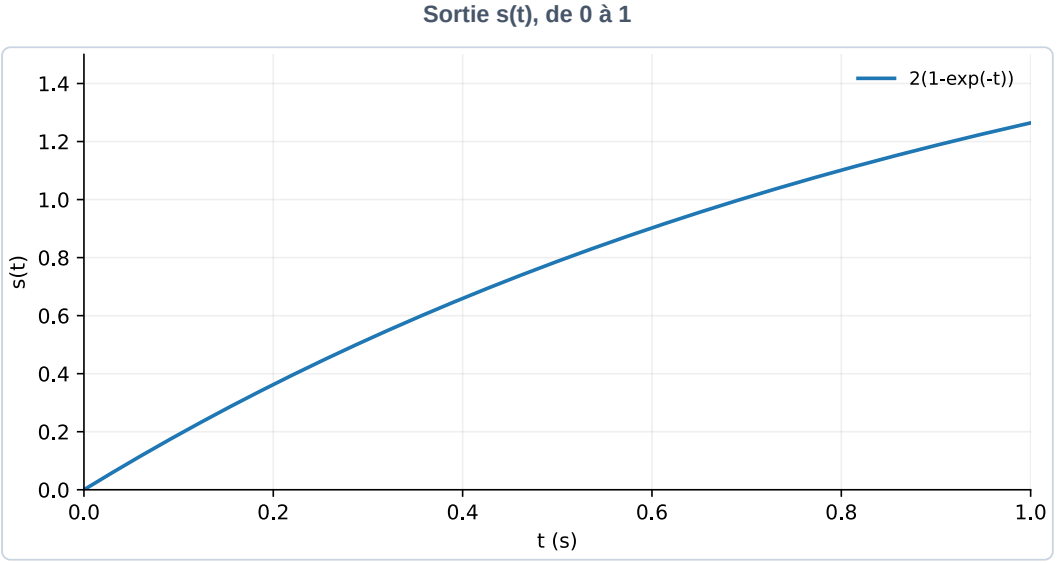
À $t = 1$, l'expression admise donne $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$. En simplifiant, $s(1) = 2 - 2/e$, soit environ $1{,}264$, arrondi au dixième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

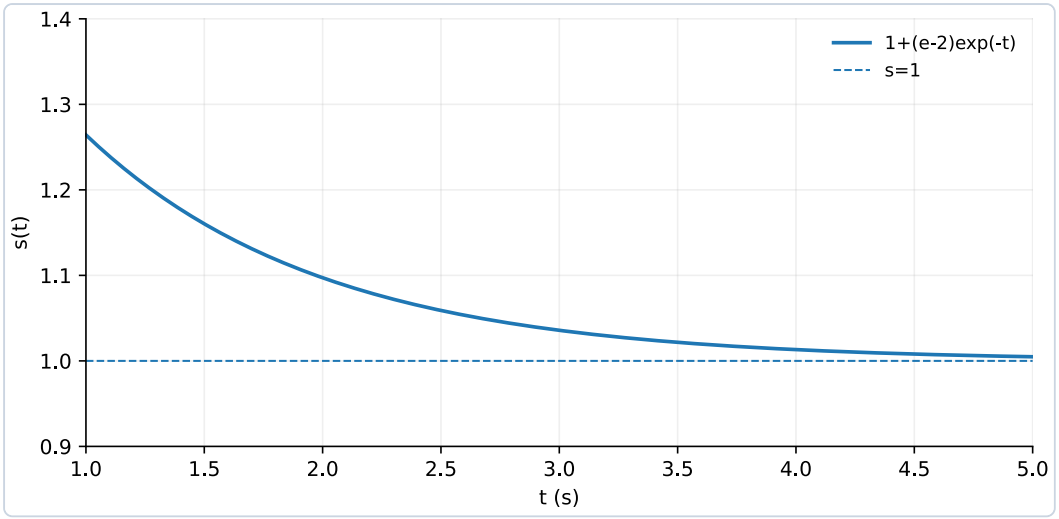
$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5. b. Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0; 1[$, la sortie suit $2(1 - e^{-t})$. À partir de $t = 1$, elle suit $1 + (e - 2)e^{-t}$. Les deux branches se rejoignent en $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}264$, puis la seconde décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.



Branche valable sur [0 ; 1[.



Branche valable pour t ≥ 1 ; le coefficient décimal représente e−2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe passe par $(0;0)$ et $(1;2-2/e)$, puis décroît vers $s=1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Dans l'expression admise pour $t \geq 1$, le terme exponentiel s'annule donc à la limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures, avec un coefficient de 1,5 ou 2 selon la spécialité. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique entrée-sortie. Ils évaluent équations différentielles, étude de fonctions, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de construire celles de l'équation complète.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ est 5 et le signe négatif de la dérivée montre que f décroît.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle : $d = \int f(t)dt$.
- Le décalage temporel $f(t - a)U(t - a)$ correspond en transformée de Laplace à $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution différentielle.
- Justifier les variations par le signe de la dérivée et distinguer une vitesse qui tend vers 5 d'un arrêt.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes et respecter les unités et l'arrondi demandé.
- Appliquer correctement le décalage temporel dans les transformées de Laplace et soigner les tracés des signaux.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du chariot ?

On résout d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont $ke^{-0,8t}$. On ajoute la solution particulière constante 5, puis on utilise $f(0) = 20$ pour déterminer la constante d'intégration.

Q : Comment calculer la distance parcourue pendant la première seconde ?

On intègre la vitesse entre 0 et 1. La primitive fournie permet de calculer $F(1) - F(0)$; on donne d'abord la valeur exacte, puis l'arrondi au centimètre demandé.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, et les trois parties du premier peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour les tracés, les unités et les vérifications.

Q : Quels critères faut-il respecter pour les tracés et les calculs ?

Le sujet ne donne pas de grille détaillée de notation. Il demande notamment des tracés sur le document-réponse, des valeurs exactes et approchées lorsqu'elles sont précisées, ainsi que des unités et des limites correctement formulées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscim.fr/assets/annales/bts-cim/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Industrialisation en Microtechniques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.